

物理問題 I

- ア $\frac{v}{T}$ イ $\frac{mv}{T}$ ウ $\frac{v}{\mu_0 g}$ エ $\frac{v}{T} - \mu g$ オ $\frac{1}{2} \left(\frac{v}{T} - \mu g \right) T^2$ or $\frac{T}{2} (v - \mu g T)$
 カ $v - \mu g T$ キ $\frac{(v - \mu g T)^2}{2 \mu g}$ ク $\frac{v}{\mu g} - \frac{2L}{v}$ ケ $\frac{vh}{ga}$ コ $\frac{1}{\mu_0}$
 サ $\sqrt{\frac{\sin \theta + \mu_0 \cos \theta}{\cos \theta - \mu_0 \sin \theta}} gR$ シ $\sqrt{\frac{h \tan \theta + b}{h - b \tan \theta}} gR$ ス $\frac{1}{\mu_0}$

問 1

解法 1

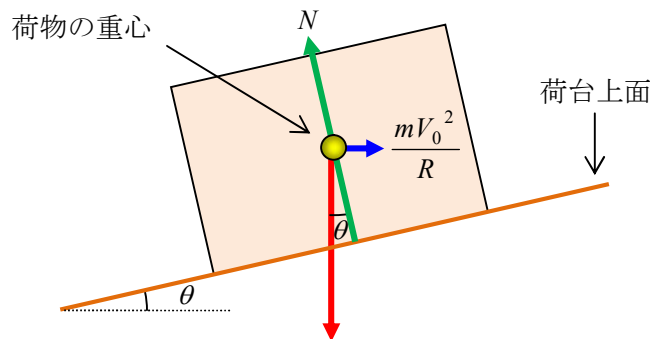
荷台上の静止観測者が見ると、荷物は荷台上面に沿った方向に静止していることと静止摩擦力が 0 であることから、

荷物に働く重力、垂直抗力、遠心力（慣性力）がつり合っている。

よって、斜面と垂直な方向の力のつり合いと斜面に沿った方向の力のつり合いは、

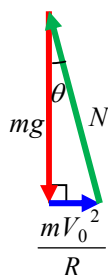
$$mg \cos \theta + \frac{mV_0^2}{R} \sin \theta = N, \quad mg \sin \theta = \frac{mV_0^2}{R} \cos \theta$$

このうち、 $mg \sin \theta = \frac{mV_0^2}{R} \cos \theta$ から V_0 を求めると、 $V_0 = \sqrt{gR \tan \theta}$



あるいは、荷物に働く重力、垂直抗力、遠心力（慣性力）のベクトル和が 0 だから、これらのベクトルをつなぐと下図のような閉じた直角三角形になる。

よって、 $\frac{mV_0^2}{R} = \tan \theta \quad \therefore V_0 = \sqrt{gR \tan \theta}$



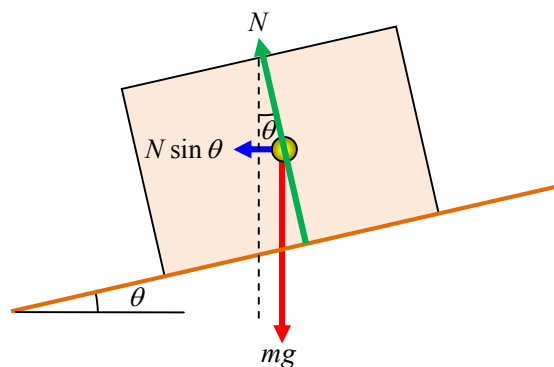
解法 2

地表上の静止観測者が見ると、荷物は、垂直抗力の軌道中心方向成分を向心力とし、

等速円運動をする。よって、その運動方程式は $m \cdot \frac{V_0^2}{R} = N \sin \theta$ ……①

また、鉛直方向の力のつり合いより、 $N \cos \theta = mg$ ……②

①, ②より、 $m \cdot \frac{V_0^2}{R} = mg \tan \theta \quad \therefore V_0 = \sqrt{gR \tan \theta}$



解説

イ

荷物が荷台から受ける静止摩擦力の大きさを f とする。

地表で静止している観測者の立場で解くと、

$$\text{運動方程式は } m \cdot \frac{v}{T} = f \quad \therefore f = \frac{mv}{T}$$

荷台で静止している観測者の立場で解くと、

$$\text{静止摩擦力と荷物が受ける慣性力の大きさのつり合いより, } f = m \cdot \frac{v}{T} \quad \therefore f = \frac{mv}{T}$$

ウ

$$\mu_0 mg = \frac{mv}{T_1} \text{ より, } T_1 = \frac{v}{\mu_0 g}$$

エ

荷台の進行方向（右方向）を正の向きとする。

地表で静止している観測者の立場で解くと、

$$\text{荷台の加速度} = \frac{v}{T}$$

荷物の加速度を α とすると、運動方程式 $m\alpha = \mu mg$ より、 $\alpha = \mu g$

よって、荷台に対する荷物の加速度は、 $\mu g - \frac{v}{T}$

この加速度の向きは負だから、 $\mu g - \frac{v}{T} < 0$ ゆえに、そのおおきさは、 $\frac{v}{T} - \mu g$

荷台で静止している観測者の立場で解くと、

$$\text{荷物の加速度を } \alpha' \text{ とすると, 運動方程式は } m\alpha' = -m \cdot \frac{v}{T} + \mu mg \quad \therefore \alpha' = -\frac{v}{T} + \mu g$$

$\alpha' < 0$ より、求める加速度の大きさ $|\alpha'| = \frac{v}{T} - \mu g$

キ

荷台に対する加速度が μg 、荷台に対する速さが $v - \mu g T$ から 0 になるから、

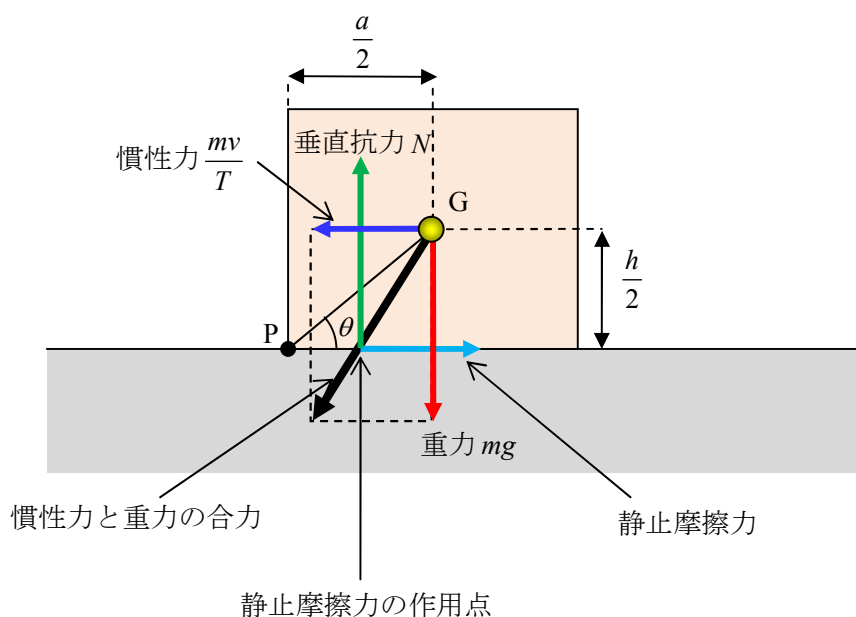
$$\text{求める変位を } \Delta x \text{ とおくと, } 0 - (v - \mu g T)^2 = 2\mu g \Delta x \quad \therefore |\Delta x| = \frac{(v - \mu g T)^2}{2\mu g}$$

ク

全移動距離は、 \square , \square より、 $\frac{T}{2}(v - \mu g T) + \frac{(v - \mu g T)^2}{2\mu g}$

よって、満たすべき条件は、 $\frac{T}{2}(v - \mu g T) + \frac{(v - \mu g T)^2}{2\mu g} \leq L \quad \therefore T \geq \frac{v}{\mu g} - \frac{2L}{v}$

ケ



回転し始めるとき，垂直抗力は P を通り紙面に垂直な軸に作用するから，その軸のまわりの垂直抗力のモーメントは 0 になる。

よって，反時計回り（転倒方向）の力のモーメントの大きさ $= \frac{mv}{T_2} \cdot \frac{h}{2}$

時計回り（反転倒方向）の力のモーメントの大きさ $= mg \cdot \frac{a}{2}$

これらのつり合いより， $\frac{mv}{T_2} \cdot \frac{h}{2} = mg \cdot \frac{a}{2} \quad \therefore T_2 = \frac{vh}{ga}$

コ

$\frac{mv}{T_1} < \frac{mv}{T} < \frac{mv}{T_2}$ より， $T_1 > T_2 \quad \therefore \frac{v}{\mu_0 g} > \frac{vh}{ga}$ よって， $\frac{h}{a} < \frac{1}{\mu_0}$

サ

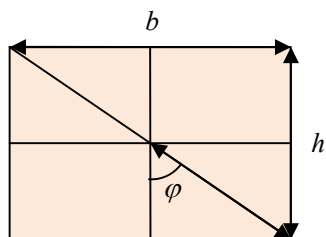
荷物上の観測者の立場によれば，

斜面に垂直な方向の力のつり合いより， $N = mg \cos \theta + \frac{mV^2}{R} \sin \theta$

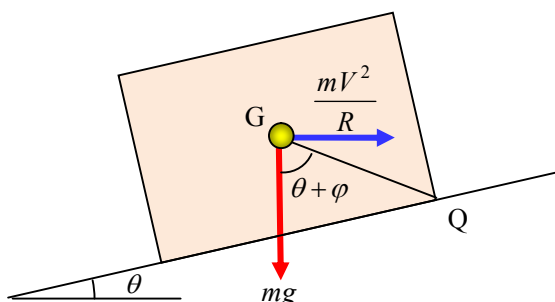
V のとき斜面に沿った方向にすべり始めるから， $\frac{mV^2}{R} \cos \theta = mg \sin \theta + \mu_0 N$

よって， $\frac{mV^2}{R} \cos \theta = mg \sin \theta + \mu_0 \left(mg \cos \theta + \frac{mV^2}{R} \sin \theta \right) \quad \therefore V = \sqrt{\frac{\sin \theta + \mu_0 \cos \theta}{\cos \theta - \mu_0 \sin \theta} gR}$

シ



GQ と鉛直下方向のなす角を φ とすると、
傾角 θ の斜面上における GQ と鉛直下方向のなす角は $\theta + \varphi$ である。



GQ = l とおき、ケと同様に、Q のまわりの力のモーメントのつり合いの式を立てると、

$$mgl \sin(\theta + \varphi) = \frac{mV^2}{R} l \cos(\theta + \varphi) \quad \therefore V = \sqrt{gR \tan(\theta + \varphi)}$$

$$\tan \varphi = \frac{b}{h} \text{ より, } \tan(\theta + \varphi) = \frac{\tan \theta + \tan \varphi}{1 - \tan \theta \tan \varphi} = \frac{\tan \theta + \frac{b}{h}}{1 - \tan \theta \cdot \frac{b}{h}} = \frac{h \tan \theta + b}{h - b \tan \theta}$$

$$\therefore V = \sqrt{\frac{h \tan \theta + b}{h - b \tan \theta} gR}$$

ス

サの V と シの V が一致するから、
$$\frac{\sin \theta + \mu_0 \cos \theta}{\cos \theta - \mu_0 \sin \theta} = \frac{h \tan \theta + b}{h - b \tan \theta}$$

これと
$$\frac{\sin \theta + \mu_0 \cos \theta}{\cos \theta - \mu_0 \sin \theta} = \frac{\tan \theta + \mu_0}{1 - \mu_0 \tan \theta} \text{ より, } \frac{\tan \theta + \mu_0}{1 - \mu_0 \tan \theta} = \frac{h \tan \theta + b}{h - b \tan \theta}$$

よって、 $(\tan \theta + \mu_0)(h - b \tan \theta) - (1 - \mu_0 \tan \theta)(h \tan \theta + b) = 0$

これを整理すると、 $(1 + \tan^2 \theta)(\mu_0 h - b) = 0$

$\tan^2 \theta + 1 \neq 0$ より、 $\mu_0 h = b \quad \therefore \frac{h}{b} = \frac{1}{\mu_0}$

別解

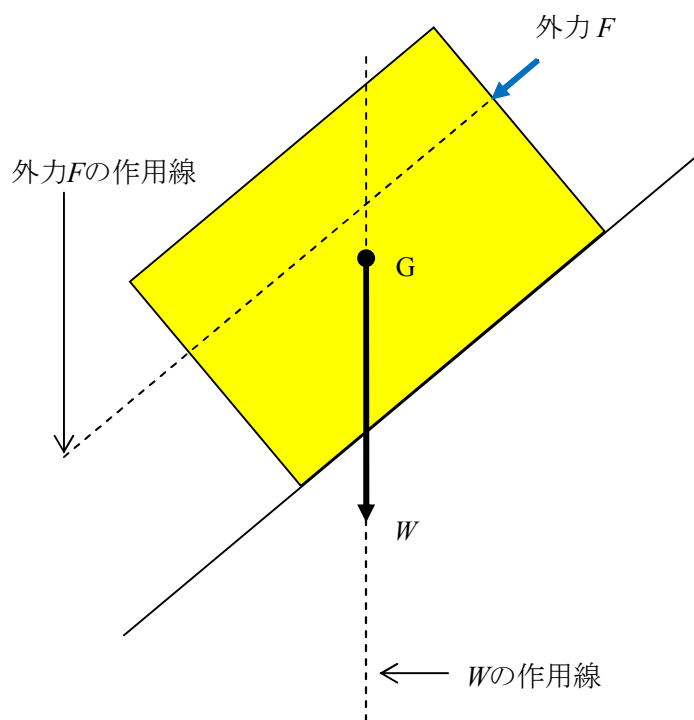
□の V と ◻の V が一致するから,
$$\frac{\sin \theta + \mu_0 \cos \theta}{\cos \theta - \mu_0 \sin \theta} = \frac{h \tan \theta + b}{h - b \tan \theta}$$

これと
$$\frac{\sin \theta + \mu_0 \cos \theta}{\cos \theta - \mu_0 \sin \theta} = \frac{\tan \theta + \mu_0}{1 - \mu_0 \tan \theta}, \quad \frac{h \tan \theta + b}{h - b \tan \theta} = \frac{\tan \theta + \frac{b}{h}}{1 - \frac{b}{h} \tan \theta}$$
 より,

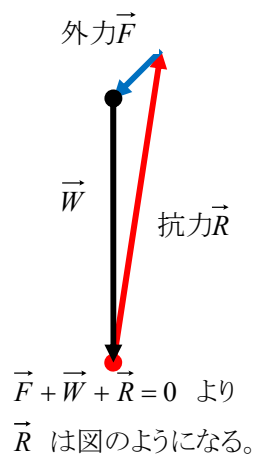
$$\frac{\tan \theta + \mu_0}{1 - \mu_0 \tan \theta} = \frac{\tan \theta + \frac{b}{h}}{1 - \frac{b}{h} \tan \theta}$$

これが実験条件を満たす任意の θ で成り立つから,
$$\frac{h}{b} = \frac{1}{\mu_0}$$

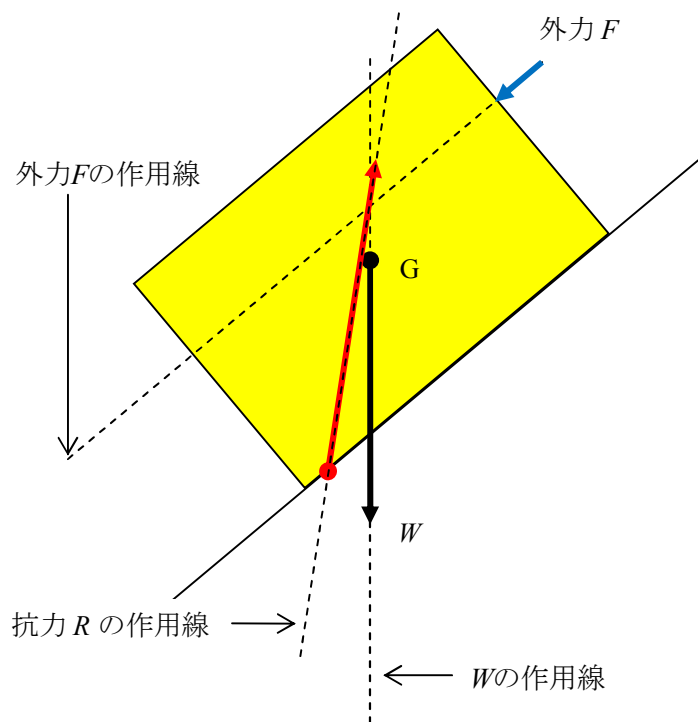
外力を加えた場合の抗力の図示



力のつりあいより、抗力と外力と重力のベクトル和が $\mathbf{0}$ になる。
 したがって、それぞれのベクトルを継ぎ足すと閉じた図形になる。
 このことを利用して、抗力 R のベクトルを下図のようにして求める。



力のモーメントがつりあうとき、平行でない作用線は一点で交わる（補足参照）。
 よって、抗力 R の作用線が重力と外力との作用線の交点と交わり且つ
 抗力 R のベクトルの始点が斜面上になるようにすればよい。



物理問題 II

(1)

イ $\sqrt{\frac{2qV}{m}}$ ロ $\frac{1}{B_0} \sqrt{\frac{2mV}{q}}$ ハ $\frac{\pi m}{qB_0}$ ニ $\frac{qB_0 R}{m}$ ホ $\frac{(qB_0 R)^2}{2m}$ ケ $\frac{qB_0^2 R^2}{2mV}$

問 1

B について

解法 1

ホより、荷電粒子の運動エネルギーは $\frac{(qB_0 R)^2}{2m}$ と表されるから、

軌道半径が R 、磁束密度が B の場合の荷電粒子の運動エネルギーは $\frac{(qBR)^2}{2m}$ となる。

また、このとき荷電粒子になされた仕事は $(n+i)qV$ である。

よって、仕事とエネルギーの関係から、 $(n+i)qV = \frac{(qBR)^2}{2m}$. . . ①

一方、イより、 $nqV = \frac{(qB_0 R)^2}{2m}$. . . ②

したがって、①より、 $\frac{n+i}{n} = \left(\frac{B}{B_0}\right)^2 \therefore B = B_0 \sqrt{\frac{n+i}{n}}$. . . (答)

解法 2

$n+i$ 回加速されたときの荷電粒子の速さを v_{n+i} とすると、

仕事とエネルギーの関係より、 $(n+i)qV = \frac{1}{2} m v_{n+i}^2 \therefore v_{n+i} = \sqrt{\frac{2(n+i)qV}{m}}$. . . ①

軌道半径 R 、磁束密度 B より、運動方程式は $m \cdot \frac{v_{n+i}^2}{R} = q v_{n+i} B \therefore B = \frac{m v_{n+i}}{qR}$. . . ②

一方、 n 回加速されたときの荷電粒子の速さを v_n とすると、

同様にして、 $v_n = \sqrt{\frac{2nqV}{m}}$. . . ③

軌道半径 R 、磁束密度 B_0 より、 $B_0 = \frac{m v_n}{qR}$. . . ④

①～④より、 $\frac{B}{B_0} = \frac{v_{n+i}}{v_n} = \sqrt{\frac{n+i}{n}} \therefore B = B_0 \sqrt{\frac{n+i}{n}}$. . . (答)

T について

荷電粒子が電極空洞内にいる時間 T_0 は、 \square より、 $T_0 = \frac{\pi m}{qB_0}$ と表すことができるから、

磁束密度が B のときのその時間 T は、 $T = \frac{\pi m}{qB}$

よって、 $\frac{T}{T_0} = \frac{B_0}{B} = \sqrt{\frac{n}{n+i}} \quad \therefore T = T_0 \sqrt{\frac{n}{n+i}} \quad \dots$ (答)

解説

\square

求める速さを v とすると、荷電粒子にする仕事 qV と運動エネルギーの関係より、

$$0 + qV = \frac{1}{2}mv^2 \quad \therefore v = \sqrt{\frac{2qV}{m}}$$

\square

求める半径を r とすると、荷電粒子の中心方向の運動方程式は $\frac{mv^2}{r} = qvB_0$

$$\therefore r = \frac{mv}{qB_0} = \frac{m}{qB_0} \sqrt{\frac{2qV}{m}} = \frac{1}{B_0} \sqrt{\frac{2mV}{q}}$$

\square

速さ v で距離 πr 移動するから、 $\frac{\pi r}{v} = \pi \cdot r \cdot \frac{1}{v} = \frac{\pi}{B_0} \sqrt{\frac{2mV}{q}} \sqrt{\frac{m}{2qV}} = \frac{\pi m}{qB_0}$

\square

軌道半径が R になったときの荷電粒子の速さを v_R とすると、

$$\text{荷電粒子の中心方向の運動方程式は } \frac{mv_R^2}{R} = qv_R B_0 \quad \therefore v_R = \frac{qB_0 R}{m}$$

\square

$$\frac{1}{2}mv_R^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \frac{(qB_0 R)^2}{m^2} = \frac{(qB_0 R)^2}{2m}$$

\square

荷電粒子にした仕事 = nqV より、

$$\text{仕事と運動エネルギーの関係式は、} \quad 0 + nqV = \frac{(qB_0 R)^2}{2m} \quad \therefore n = \frac{qB_0^2 R^2}{2mV}$$

(2)

$\frac{q^2 B_0}{2\pi m}$
 $\frac{\pi r^2 \Delta B}{\Delta t}$
 $\frac{r \Delta B}{2\Delta t}$
 $\frac{qr}{m} \left(B_0 + \frac{\Delta B}{2} \right)$

$\frac{q^2 r}{2m} \left(B_0 + \frac{\Delta B}{2} \right) \Delta B$ (非慣性系) または $\frac{q^2 r}{m} \left(B_0 + \frac{\Delta B}{2} \right) (B_0 + \Delta B)$ (慣性系)
 ③

問 2

誘導起電力の大きさ $V = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ より, 誘導電場の大きさ $E = \frac{\Delta\Phi}{2\pi r \Delta t}$

よって, 荷電粒子の運動量変化と荷電粒子が受ける力積の関係式は,

$$m(v + \Delta v) - mv = q \cdot \frac{\Delta\Phi}{2\pi r \Delta t} \cdot \Delta t \quad \therefore m\Delta v = \frac{q\Delta\Phi}{2\pi r} \quad \dots \textcircled{1}$$

一方, 速さ v の等速円運動の中心方向の運動方程式 $\frac{mv^2}{r} = qvB_0$ より,

$$mv = qrB_0 \quad \dots \textcircled{2}$$

速さ $v + \Delta v$ の等速円運動の中心方向の運動方程式 $\frac{m(v + \Delta v)^2}{r} = q(v + \Delta v)(B_0 + \Delta B)$ より,

$$m(v + \Delta v) = qr(B_0 + \Delta B) \quad \dots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{3} - \textcircled{2} \text{ より, } m\Delta v = qr\Delta B \quad \dots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{4} \text{ より, } \frac{q\Delta\Phi}{2\pi r} = qr\Delta B \quad \therefore \Delta\Phi = 2\pi r^2 \Delta B$$

別解

等速円運動をし続けるから, 非慣性系の中心方向の合力は 0 である。

これと解説 の中心方向の合力の式

$$q(v + \Delta v)(B_0 + \Delta B) - \frac{m(v + \Delta v)^2}{r} = (v + \Delta v) \left\{ q(B_0 + \Delta B) - \frac{m}{r}(v + \Delta v) \right\}$$

$$\text{より, } q(B_0 + \Delta B) - \frac{m}{r}(v + \Delta v) = 0$$

ここで, 誘導起電力の大きさ $V = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ より, 誘導電場の大きさ $E = \frac{\Delta\Phi}{2\pi r \Delta t}$

よって, 荷電粒子の運動量変化と荷電粒子が受ける力積の関係式は,

$$m(v + \Delta v) - mv = q \cdot \frac{\Delta\Phi}{2\pi r \Delta t} \cdot \Delta t \quad \therefore \Delta v = \frac{q\Delta\Phi}{2\pi r m} \quad \therefore v + \Delta v = \frac{qB_0 r}{m} + \frac{q\Delta\Phi}{2\pi r m}$$

$$\therefore q(B_0 + \Delta B) - \frac{m}{r}(v + \Delta v) = q(B_0 + \Delta B) - \frac{m}{r} \left(\frac{qB_0 r}{m} + \frac{q\Delta\Phi}{2\pi r m} \right) = q \left(\Delta B - \frac{\Delta\Phi}{2\pi r^2} \right) = 0$$

$$\therefore \Delta\Phi = 2\pi r^2 \Delta B$$

問 3

(b)

解説

ト

求める電流を I ，軌道面を荷電粒子が単位時間あたりに通過する回数を n とすると，

$$I = nq \quad \dots \textcircled{1}$$

荷電粒子の速さを v とすると， $v = n \times 2\pi r \quad \dots \textcircled{2}$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{より}, I = \frac{qv}{2\pi r} \quad \dots \textcircled{3}$$

荷電粒子の中心方向の運動方程式は， $\frac{mv^2}{r} = qvB_0$ より， $v = \frac{qB_0 r}{m} \quad \dots \textcircled{4}$

$$\text{よって}, \textcircled{3}, \textcircled{4} \text{より}, I = \frac{q}{2\pi r} \cdot \frac{qB_0 r}{m} = \frac{q^2 B_0}{2\pi m}$$

チ

起電力の大きさを V とすると， $V = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{\pi r^2 \Delta B}{\Delta t} \quad (\because \frac{\Delta B}{\Delta t} > 0)$

リ

電場の大きさを E とすると， $V = E \cdot 2\pi r$ より， $E = \frac{V}{2\pi r} = \frac{1}{2\pi r} \cdot \frac{\pi r^2 \Delta B}{\Delta t} = \frac{r \Delta B}{2 \Delta t}$

ヌ

力積と運動量変化の関係より， $m(v + \Delta v) - mv = qE \Delta t \quad \therefore v + \Delta v = v + \frac{qE \Delta t}{m}$

これと④および $E = \frac{r \Delta B}{2 \Delta t}$ より， $v + \Delta v = \frac{qB_0 r}{m} + \frac{qr \Delta B}{2m} = \frac{qr}{m} \left(B_0 + \frac{\Delta B}{2} \right)$

ル

荷電粒子とともに運動する観測者（非慣性系）が解いた場合

向心方向に大きさ $q(v + \Delta v)(B_0 + \Delta B)$ のローレンツ力

遠心方向に大きさ $\frac{m(v + \Delta v)^2}{r}$ の遠心力を受けるから，

中心方向の合力は，

$$\begin{aligned} q(v + \Delta v)(B_0 + \Delta B) - \frac{m(v + \Delta v)^2}{r} &= (v + \Delta v) \left\{ q(B_0 + \Delta B) - \frac{m}{r} (v + \Delta v) \right\} \\ &= \frac{qr}{m} \left(B_0 + \frac{\Delta B}{2} \right) \left\{ q(B_0 + \Delta B) - \frac{m}{r} \cdot \frac{qr}{m} \left(B_0 + \frac{\Delta B}{2} \right) \right\} \\ &= \frac{q^2 r}{2m} \left(B_0 + \frac{\Delta B}{2} \right) \Delta B \end{aligned}$$

地表で静止している観測者（慣性系）が解いた場合

荷電粒子が中心方向に受ける外力はローレンツ力だけだから、

$$q(v + \Delta v)(B_0 + \Delta B) = \frac{q^2 r}{m} \left(B_0 + \frac{\Delta B}{2} \right) (B + \Delta B)$$

㉟

$\Delta B > 0$ のとき、中心方向の合力 $\frac{q^2 r}{2m} \left(B_0 + \frac{\Delta B}{2} \right) \Delta B > 0$ だから、軌道半径は小さくなる。

問 3

ベータトロンが与える磁場がある強さのときの磁束密度（または単位面積当たりの磁力線の本数）が p である円環と q である円環（ $p > q$ ）で比較すると、磁場の強さを a 倍にすると、それぞれの磁束密度は ap , aq となるから、それぞれの磁束密度の変化を ΔB_p , ΔB_q とすると、

$$\Delta B_p = ap - p = p(a - 1), \Delta B_q = aq - q = q(a - 1) \text{ より, } |\Delta B_p| > |\Delta B_q|$$

つまり、ベータトロンが与える磁場の強さを変化させたときの磁束密度変化の大きさは磁束密度が高いところほど大きい。

これを念頭に入れると、以下のようになる。

$\Delta \Phi = 2\pi r^2 \Delta B = \pi r^2 \Delta B \times 2$ であることは軌道で囲まれる面の磁束密度の平均値が軌道上のその 2 倍であることを意味している。よって、これを表す図(b)が正解である。

物理問題 III

(1)

あ $\frac{v_1(t_s - t)}{\sin \theta_1}$
 ㍁ $v_2(t_s - t)$
 ㍂ $\frac{v_2}{v_1} \cdot \sin \theta_1$

解説

あ

点 P からの媒質 1 の波面と BS の交点を R とすると、 $\angle SPR = \theta_1$ より、 $\overline{PS}(t) \sin \theta_1 = \overline{RS}(t)$

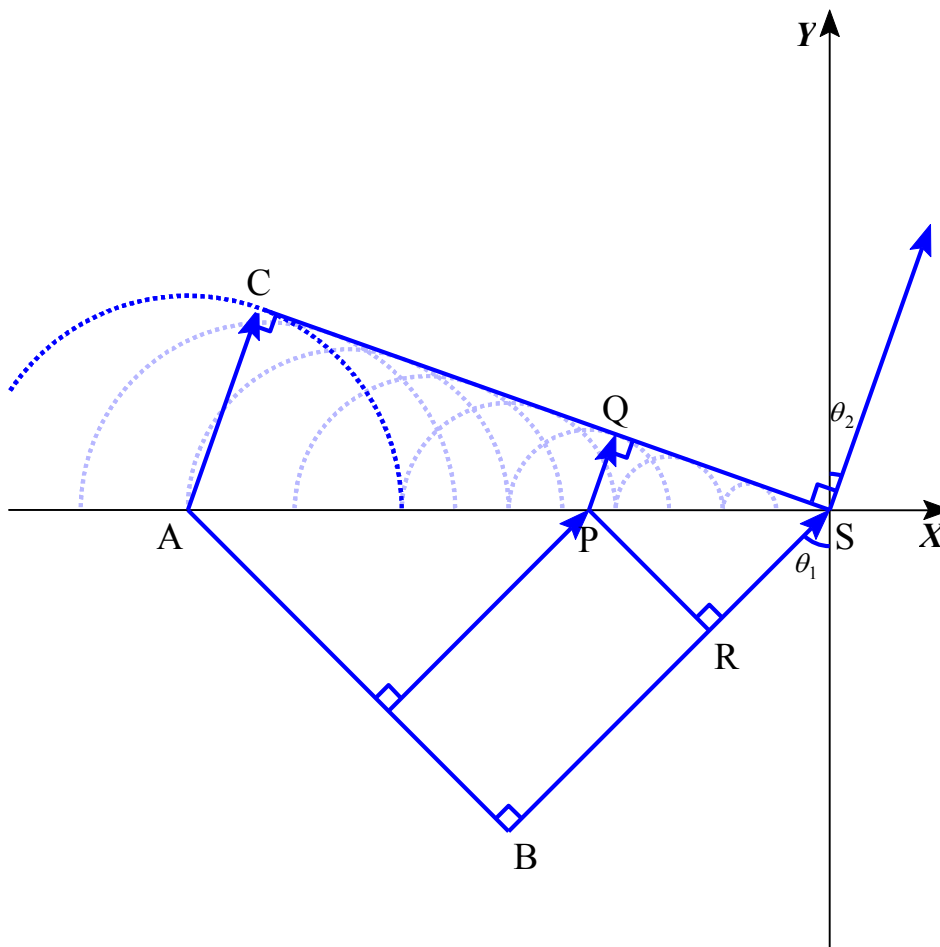
これと $\overline{RS}(t) = v_1(t_s - t)$ より、 $\overline{PS}(t) = \frac{v_1(t_s - t)}{\sin \theta_1}$

㍂

$\angle PSQ = \theta_2$ より、 $\overline{PQ}(t) = \overline{PS}(t) \sin \theta_2$

よって、 $v_2(t_s - t) = \frac{v_1(t_s - t)}{\sin \theta_1} \cdot \sin \theta_2 \quad \therefore \sin \theta_2 = \frac{v_2}{v_1} \cdot \sin \theta_1$

あるいは、屈折の公式 $\frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} = \frac{v_2}{v_1}$ より、 $\sin \theta_2 = \frac{v_2}{v_1} \cdot \sin \theta_1$



(2)

問 1

図 1 の点 P から放射される素元波と同様に扱うから、

$$\overline{PS}(t) = V(t_s - t), \quad \overline{PQ}(t) = c(t_s - t), \quad \overline{PS}(t) \sin \theta = \overline{PQ}(t) \text{ より, } \sin \theta = \frac{c}{V} \quad \dots \text{(答)}$$

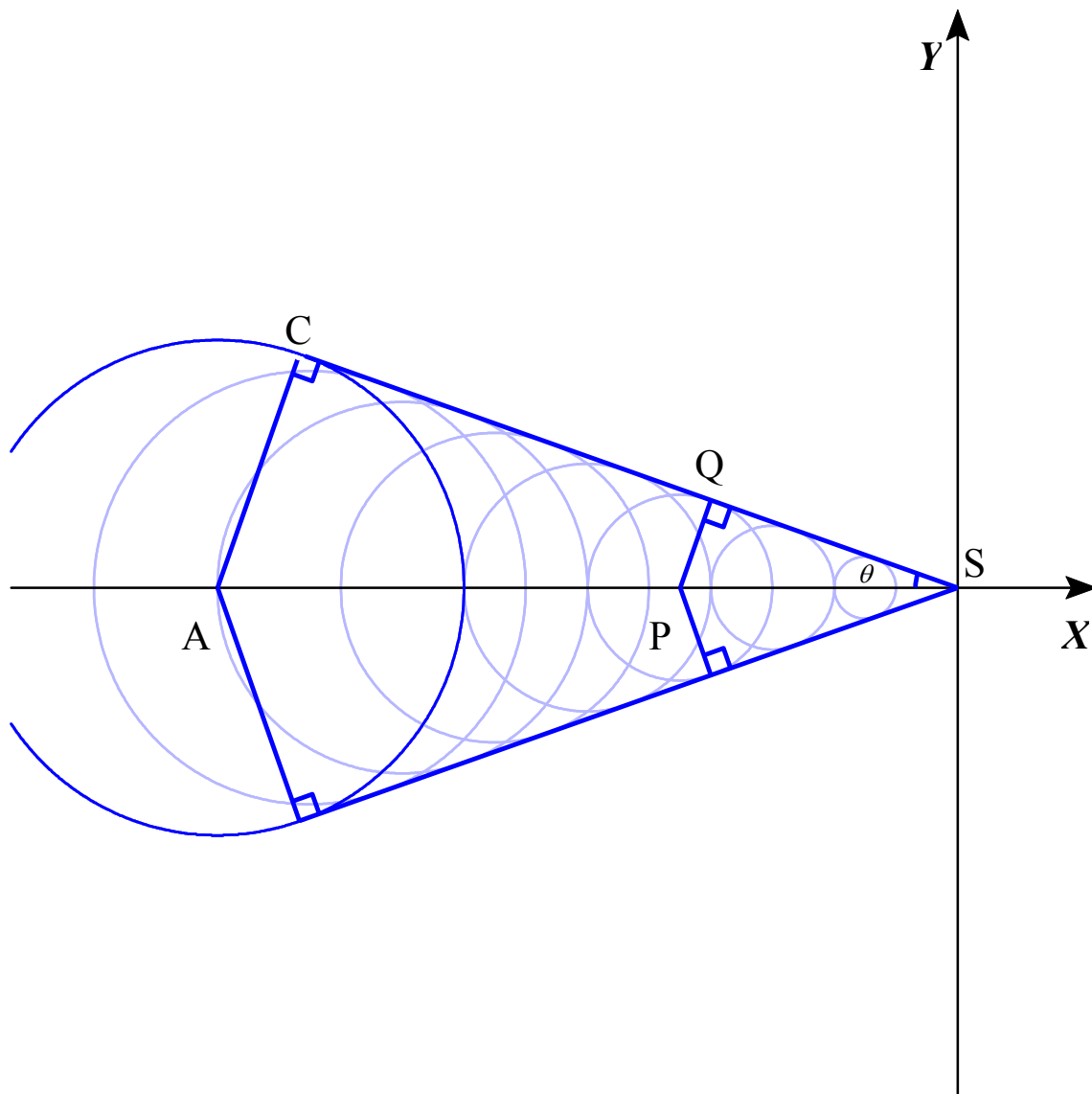
$$\frac{c}{V} = \sin \theta < 1 \text{ より, 満たすべき条件は, } c < V \quad \dots \text{(答)}$$

補足

船の速さを飛行機の速さ、波の速さを音速に置き換えると、

$c < V$ であることは、飛行機の速さが超音速であることを示している。

したがって、くさび形の波面は超音速の飛行機がつくる波面に置き換えることができる。



(3)

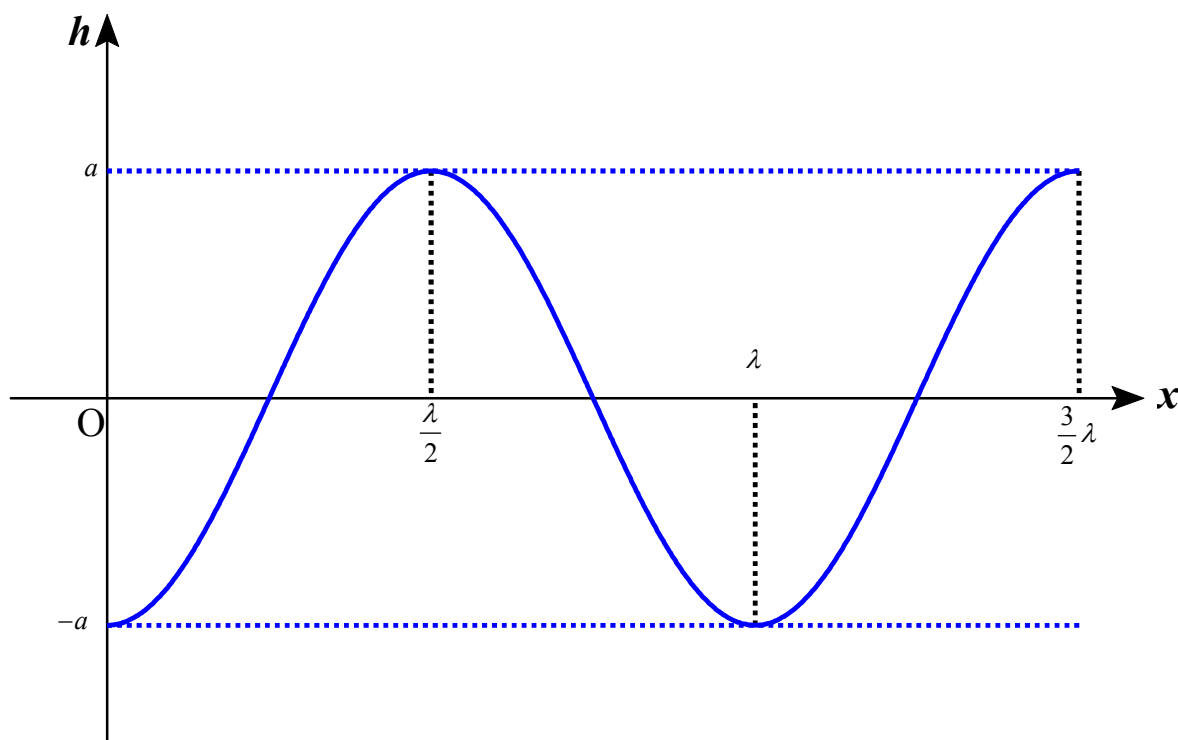
例 $\frac{\omega}{k}$

解説

位相速度とは、波形の移動速度のことで、波の速度に他ならない。

$$\text{よって、 } c = f\lambda = \frac{\omega}{2\pi} \cdot \frac{2\pi}{k} = \frac{\omega}{k}$$

問 2



解説

$$\begin{aligned} h &= a \sin\left(kx - \omega \cdot \frac{1}{4f}\right) \\ &= a \sin\left(kx - 2\pi f \cdot \frac{1}{4f}\right) \\ &= a \sin\left(kx - \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

より、

図 3 のグラフを位相 $\frac{\pi}{2}$ だけ、すなわち $\frac{\lambda}{4}$ だけ x 軸正方向に平行移動すればよい。

補足

位置 $x=0$ における単振動を表す式は $h = a \sin(-2\pi ft)$

位置 $x=0$, 時刻 t の波が位置 x に到達する時刻を t' とすると, $t'-t = \frac{x}{v} = \frac{x}{f\lambda} \quad \therefore t = t' - \frac{x}{f\lambda}$

よって, 位置 x での単振動を表す式は $h = a \sin\left\{-2\pi f\left(t' - \frac{x}{f\lambda}\right)\right\} = a \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x - 2\pi ft'\right)$ であり,

この式の t' を t に書き替えることにより, $h = a \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x - 2\pi ft\right)$ となる。

さらに, 角振動数 $\omega = 2\pi f$, 波数 $\frac{2\pi}{\lambda}$ を k とおくと, $h = a \sin(kx - \omega t)$ が得られる。

尚, 波数とは単位長あたりの波の数のことで $\frac{1}{\lambda}$ で与えられるが, $\frac{2\pi}{\lambda}$ と表すこともある。

(4)

お $\Delta kx - \Delta \omega t$
 か ②
 き $\frac{\omega_1 - \omega_2}{2\pi}$ または $\frac{\Delta \omega}{\pi}$

問 3

$$c = \frac{\omega}{k} = \frac{\sqrt{gk}}{k} = \sqrt{\frac{g}{k}} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\omega = \alpha\sqrt{k} \text{ のとき } \Delta\omega = \frac{\alpha\Delta k}{2\sqrt{k}} \text{ であり, } \omega = \sqrt{gk} \text{ より, } \alpha = \sqrt{g}$$

$$\text{よって, } v_G = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{\frac{\sqrt{g}\Delta k}{2\sqrt{k}}}{\Delta k} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{k}} \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ②より,

$$\frac{v_G}{c} = \frac{1}{2} \quad \dots \text{(答)}$$

解説

お

$$h = h_1 + h_2 = a \sin(k_1 x - \omega_1 t) + a \sin(k_2 x - \omega_2 t)$$

ここで, $A + B = k_1 x - \omega_1 t$, $A - B = k_2 x - \omega_2 t$ とおくと,

$$A = \frac{(k_1 + k_2)x - (\omega_1 + \omega_2)t}{2} = kx - \omega t$$

$$B = \frac{(k_1 - k_2)x - (\omega_1 - \omega_2)t}{2} = \Delta kx - \Delta \omega t$$

$a \sin(A + B) + a \sin(A - B) = 2a \cos B \sin A$ より,

$$h = h_1 + h_2 = 2a \cos(\Delta kx - \Delta \omega t) \sin(kx - \omega t)$$

か

$$\frac{\omega_1}{k_1} = \frac{\omega_2}{k_2} \text{ より, } \frac{\omega + \Delta \omega}{k + \Delta k} = \frac{\omega - \Delta \omega}{k - \Delta k}$$

$$\therefore (\omega + \Delta \omega)(k - \Delta k) = (\omega - \Delta \omega)(k + \Delta k)$$

$$\therefore \frac{\omega}{k} = \frac{\Delta \omega}{\Delta k}$$

$$\frac{\omega}{k} = c, \quad \frac{\Delta \omega}{\Delta k} = v_G \text{ より, } c = v_G$$

き

図 5 のグラフ ($x=0$ における振動を表すグラフ) の式は $h = -2a \cos \Delta \omega t \sin \omega t$

この式の $-2a \cos \Delta \omega t$ の部分は振幅の規則的な強弱の変化を表すから,

$$\text{その繰り返し周期を } T \text{ とすると, } \Delta \omega > 0 \text{ より, } T = \frac{2\pi}{\Delta \omega}$$

うなりの周期は $h = a$ と $h = -a$ の繰り返し周期だから, その周期は $\frac{T}{2} = \frac{\pi}{\Delta \omega}$

よって, うなりの振動数, すなわち単位時間あたりのうなりの回数は $\frac{\Delta \omega}{\pi}$. . . ①

$$\text{また, } \omega_1 = \omega + \Delta \omega, \quad \omega_2 = \omega - \Delta \omega \text{ より, } \Delta \omega = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \quad \dots \text{ ②}$$

ゆえに, ①, ②より, 単位時間あたりのうなりの回数は $\frac{\omega_1 - \omega_2}{2\pi}$